234. normalデアッテcompletely normalデナイ空間ノ一例

角谷静夫（阪大）

(x, y) 平面上ノ点全体ヲ空間トスル，直線 $x=x_0$, $-\infty<y<+\infty$ ヲ L_{x_0}, $y=y_0$, $-\infty<x<+\infty$ ヲ L'_{y_0} ニテ表ハシ、各点 (x_0, y_0) ノ近傍ヲ次ノ如ク定義スル。

1° $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ ナルトキハ (x_0, y_0) ノミヲ近傍トスル。即チコノ点ハ孤立点トナル。

2° $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ ナルトキハ直線 L_{x_0} ヨリ (x_0, y_0) 以外ノ点ヲ任意ニ有限個取リ去ッタモノヲ近傍トスル。

3° $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ ナルトキハ直線 L'_{y_0} ヨリ (x_0, y_0) 以外ノ点ヲ任意ニ有限個取リ去ッタモノヲ近傍トス

ル。

4° $x_0=0$, $y_0=0$ ナルトキハ空間全体ヨリ任意ニ有限個ノ L_{x_i}, L'_{y_k} ($x_i \neq 0$, $y_k \neq 0$) ヲ取リ去ッタモノヲ近傍トスル。

此ノ如ク定義サレタ空間ガ Hausdorff ノ空間デアルコトハ明カデアル．先ヅコレガ normal デアルコトヲ示サウ。

A,B ヲ二ツノ互ニ素ナ閉集合トスル。

原点 $O=(0,0)$ ハ A 又ハ B ニ属シナイ。$O \overline{\in} A$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。$A' \subset A$ デアルカラ $O \overline{\in} A'$ デアル。シタガッテ 4° ヨリ適当ナ x_i, y_k ($i=1,2,\cdots\cdots,n$; $k=1,2,\cdots\cdots,m$; $x_i \neq 0$, $y_k \neq 0$) ヲトレバ A ハ有限個ノ直線

$$L_{x_i},\ L'_{y_k} \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n;\ k=1,2,\cdots\cdots,m)$$

ノ和集合ニ含マレル。

i) $P_i=(x_i,0)$ ガ A ニ属スルトキハ $P_i \overline{\in} B'$ デアルカラ 2° ヨリ L_{x_i} 上ニハ B ノ点ハ有限個シカ存在シナイ。

$$A_i = L_{x_i} - L_{x_i}\cdot B$$

トオク。

ii) $P_i=(x_i,0)$ ガ A ニ属シナイトキハ $P_i \overline{\in} A'$ デアルカラ L_{x_i} 上ニハ A ノ点ハ有限個シカ存在シナイ。

$$A_i = L_{x_i}\cdot A$$

トオク。

iii) 次ニ全ク同様ニ $P'_k=(0, y_k)$ ガAニ属スルカ属シナイカニ従ッテ A'_k ヲ

$$A'_k = L'_{y_k} - L'_{y_k} \cdot B$$

又ハ　$$A'_k = L'_{y_k} \cdot A$$

ニヨッテ定義スル。

今　$$O(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{k=1}^{m} A'_k$$

ヲ作レバ i) ii) iii) ヨリコレハ明カニ開集合デ

$$A \subset O(A), \quad B \cdot O(A) = 0$$

デアル。トコロガ一方 $O(A)$ ハ閉集合デアルカラ $O(B) = C(O(A))$ トオケバ $O(B)$ ハ開集合トナリ

$$A \subset O(A), \quad B \subset O(B), \quad O(A) \cdot O(B) = 0 \text{ --------- } (1)$$

デアル。故ニコノ空間ハ *normal* デアル。

次ニコレガ *completely normal* デナイコトヲ示サウ。

A,Bヲ次ノ如ク定義スル。

A:　$x \neq 0, \ y = 0$ ナル点 (x, y) 全体

B:　$x = 0, \ y \neq 0$　　　〃

明カニ $A \cdot B = A' \cdot B = A \cdot B' = 0$ デアル。然ルニ (1) ヲ満足スル開集合 $O(A), O(B)$ ハ存在シナイ。

何者，若シコノヤウナ $O(A), O(B)$ ガ存在スルトスレ

バ $A \subset O(A)$ ヨリ ii) ニヨツテ各々ノ L_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) ノ上ニハ $O(A)$ ニ属シナイ点，シタガツテ $O(B)$ ニ属スル点ハ有限個シカ存在シナイ。コレラノ点ノ y—座標ヲ $y_{n,1}$, $y_{n,2}$, $\cdots\cdots$, y_{n,p_n} トスレバ $y_{n,j}$ ($1 \leqq j \leqq p_n$, $n=1,2,\cdots\cdots$) ハ全体デ多クトモ可附番個シカ存在シナイカラ適當ニ y_0 ヲトレバコレラノ何レトモ一致シナイヨウニ出來ル。コノ y_0 ニ對シテ点 (n, y_0) ($n=1,2,\cdots\cdots$) ハ假定ヨリ $O(B)$ ニ属シナイ。コレハ $(0, y_0)$ ガ $O(B)$ ニ属スルコトニ矛盾スル。

ヨツテコノ空間ハ completely normal デナイ。

コノ空間ハ $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナル部分ダケ考ヘテモ同様ノコトガ云ヘル。又、x ノ座標ハ可附番個ダケ考ヘレバ十分デアル。

(注意) 上記ノ空間ヨリ原点 O ヲ取去ツタモノハ regular デアツテ normal デナイ。